

厦门市 2025 届高三毕业班第四次质量检测参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1~4: BACD

5~8: CCBB

8. 解析: $B = (0, 1)$, 则 $A \cap B = \emptyset$ 等价于 $e^{2x} < a\sqrt{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无解, 即 $x \in (0, 1)$ 时, $e^{2x} \geq a\sqrt{x}$ 恒成立,

所以 $a \leq \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$, 设 $h(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$, $h'(x) = \frac{(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}})e^{2x}}{x} = \frac{(4x-1)e^{2x}}{2x\sqrt{x}}$, 可得 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{4})$ 单调递减,

在 $(\frac{1}{4}, +\infty)$ 单调递增, 所以 $h_{\min}(x) = h(\frac{1}{4}) = 2\sqrt{e}$, 所以 $a \leq 2\sqrt{e}$.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. BC

10. BCD

11. ACD

11. 解析: 若 $a_n = -\frac{1}{2^n}$, 则 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$, $a_3 = -\frac{1}{8}$, 因为 $a_n < 0$, 所以 $S_n \leq a_1 = -\frac{1}{2}$, 又因为

$a_2 = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$, 所以不存在正整数 m , 使得 $a_2 \leq S_m < a_3$, 所以 $\{-\frac{1}{2^n}\}$ 不是“可分等比数列”, 所以选项 A 正确;

若 $a_n = (\frac{3}{2})^n$, 则 $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{9}{4}$, $a_3 = \frac{27}{8}$, 所以 $S_1 = \frac{3}{2} < a_2$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n \geq a_1 + a_2 = \frac{15}{4} > a_3$,

所以不存在正整数 m , 使得 $a_2 \leq S_m < a_3$, 所以 $\{(\frac{3}{2})^n\}$ 不是“可分等比数列”, 所以选项 B 错误;

若 $a_1 < 0$, 则有 $S_n \leq a_1 < a_2 < a_3$, 所以不存在正整数 m , 使得 $a_2 \leq S_m < a_3$, 所以 $a_1 > 0$,

因为 $\{a_n\}$ 是递增等比数列, 所以 $q > 1$, $a_n > 0$, 所以 $S_{n+1} > a_{n+1}$,

因为 $a_n \leq S_m < a_{n+1}$, 所以 $m < n+1$, 即 $m \leq n$.

下证: 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 当且仅当 $m = n$ 时, $a_n \leq S_m < a_{n+1}$.

反证法: 假设存在正整数 n , 使得当 $m \leq n-1$ 时, $a_n \leq S_m < a_{n+1}$, 取满足条件的最小正整数 n_0 , 此

时有 $m \leq n_0 - 1$, 使得 $a_{n_0} \leq S_m < a_{n_0+1}$ 且 $a_{n_0-1} \leq S_{n_0-1} < a_{n_0}$, 则 $a_{n_0-1} \leq S_{n_0-1} < a_{n_0} \leq S_m$, 即 $S_m > S_{n_0-1}$, 即

$m > n_0 - 1$

与 $m \leq n_0 - 1$ 矛盾.

所以对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 当且仅当 $m = n$ 时, $a_n \leq S_m < a_{n+1}$, 所以选项 C 正确;

下证: $q \geq 2$.

由上可知 $m = n$, 即 $a_n \leq S_n < a_{n+1}$ 恒成立, 只需 $S_n < a_{n+1}$, 即 $q^n < q^n(q-1) + 1$ 恒成立,

①当 $q \geq 2$ 时, 因为 $q^n(q-1) + 1 - q^n = q^n(q-2) + 1 > 0$ 恒成立, 所以 $q \geq 2$ 符合要求;

②当 $1 < q < 2$ 时, 因为 $q^n(q-1) + 1 - q^n = q^n(q-2) + 1$, 当 $n > \log_q(\frac{1}{2-q})$ 时,

$q^n(q-2) + 1 < -1 + 1 = 0$, 不符合题设要求. 综上, $q \geq 2$, 所以选项 D 正确.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 8

13. 18

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. 解析: 设 $P(x, y)$, 依题意得 $|y-2| = |PA| = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$, 化简可得 $x^2 = -4y$, 设 $P(x_0, -\frac{x_0^2}{4})$,

则 $\tan \angle PTO = \left| \frac{1}{k_{TP}} \right| = \left| \frac{x_0}{2 + \frac{x_0^2}{4}} \right| = \left| \frac{4}{\frac{8}{x_0} + x_0} \right| \leq \frac{4}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 当且仅当 $\frac{8}{x_0} = x_0$, 即 $x_0 = \pm 2\sqrt{2}$ 时取等,

所以 $\sin \angle PTO \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．解：解法 1：

(1) 因为 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 即 $a \sin C + c(\sqrt{3} \cos A - \sqrt{3}) = 0$,1 分

由正弦定理得, $\sin A \sin C + \sin C(\sqrt{3} \cos A - \sqrt{3}) = 0$,

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C > 0$, 所以 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = \sqrt{3}$,3 分

即 $\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,4 分

又 $0 < A < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, (没有角的范围扣 1 分)

所以 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 因为 $a = 2$, $A = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理得 $2^2 = b^2 + c^2 - bc$, 即 $(b+c)^2 - 3bc = 4$,8 分

所以 $(b+c)^2 - 4 = 3bc \leq 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$,10 分

整理得 $(b+c)^2 \leq 16$, 即 $b+c \leq 4$, 当且仅当 $b=c=2$ 取等, (没有写取等条件扣 1 分)12 分

所以 $\triangle ABC$ 周长最大值为 613 分

解法 2：

(1) 因为 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 所以 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 即 $a \sin C + c(\sqrt{3} \cos A - \sqrt{3}) = 0$,

由正弦定理得, $\sin A \sin C + \sin C(\sqrt{3} \cos A - \sqrt{3}) = 0$,

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C > 0$, 所以 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = \sqrt{3}$,3 分

又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 即 $3(1 - \cos A)^2 + \cos^2 A = 1$,4 分

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$ 或 $\cos A = 1$, 又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $b = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin B$, $c = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin C$,8 分

所以 $\triangle ABC$ 周长 $l = a + b + c$

$$= 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} (\sin B + \sin C)$$

$$= 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) + \sin C \right] \text{9 分}$$

$$= 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2} \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C \right)$$

$$= 2 + 4 \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) \text{11 分}$$

所以 $l \leq 6$, 当 $C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $C = \frac{\pi}{3}$ 时取等, (没有写取等条件扣 1 分)

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 613 分

16．解法 1：

(1) 由题意得, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,1 分

$$f'(x) = x - (a-2) - \frac{2a}{x} \quad \text{-----2 分}$$

$$= \frac{x^2 - (a-2)x - 2a}{x}$$

$$= \frac{(x-a)(x+2)}{x}, \quad \text{-----3 分}$$

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, -----5 分

②当 $a > 0$ 时, 当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增. -----7 分

(2) 由 (1) 得, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a) = \frac{1}{2}a^2 - a(a-2) - 2a \ln a = -\frac{1}{2}a^2 + 2a - 2a \ln a$, -----8 分

欲证明 $f(x) \geq \ln a - a^2 + \frac{5}{2}$, 只需证 $-\frac{1}{2}a^2 + 2a - 2a \ln a \geq \ln a - a^2 + \frac{5}{2}$,

即证 $\frac{1}{2}a^2 + 2a - (2a+1) \ln a - \frac{5}{2} \geq 0$, -----9 分

设 $g(a) = \frac{1}{2}a^2 + 2a - (2a+1) \ln a - \frac{5}{2}$, $a \in (0, +\infty)$,

$g'(a) = a + 2 - 2 \ln a - \frac{2a+1}{a} = a - \frac{1}{a} - 2 \ln a$, -----10 分

设 $h(a) = a - \frac{1}{a} - 2 \ln a$, $a \in (0, +\infty)$,

$h'(a) = 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{(a-1)^2}{a^2} \geq 0$, 所以 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, -----12 分

又 $h(1) = 0$, -----13 分

所以当 $a \in (0, 1)$ 时, $h(a) < 0$, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减,

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $h(a) > 0$, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增,

所以 $g(a) \geq g(1) = 0$, 即 $\frac{1}{2}a^2 + 2a - (2a+1) \ln a - \frac{5}{2} \geq 0$,

所以 $f(x) \geq \ln a - a^2 + \frac{5}{2}$. -----15 分

解法 2: (1) 同解法 1;

(2) 由 (1) 得, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a) = \frac{1}{2}a^2 - a(a-2) - 2a \ln a = -\frac{1}{2}a^2 + 2a - 2a \ln a$, -----8 分

欲证明 $f(x) \geq \ln a - a^2 + \frac{5}{2}$, 只需证 $-\frac{1}{2}a^2 + 2a - 2a \ln a \geq \ln a - a^2 + \frac{5}{2}$,

即证 $\frac{1}{2}a^2 + 2a - (2a+1) \ln a - \frac{5}{2} \geq 0$, -----9 分

因为 $2a+1 > 0$, 只需证 $\frac{a^2 + 4a - 5}{2(2a+1)} - \ln a \geq 0$,

设 $g(a) = \frac{a^2 + 4a - 5}{2(2a+1)} - \ln a$, $a \in (0, +\infty)$, -----11 分

$$g'(a) = \frac{a^2 + a + 7}{(2a+1)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}{a(2a+1)^2} = \frac{(a-1)^3}{a(2a+1)^2}, \quad \text{13分}$$

当 $a \in (0, 1)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减, 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增,

$$\text{所以 } g(a) \geq g(1) = 0, \text{ 即 } \frac{1}{2}a^2 + 2a - (2a+1)\ln a - \frac{5}{2} \geq 0,$$

$$\text{所以 } f(x) \geq \ln a - a^2 + \frac{5}{2}. \quad \text{15分}$$

17. 解法 1:

(1) 取 CD 中点 M , 连接 FM . 因为 $\triangle CDF$ 是正三角形, 所以 $FM \perp CD$,
又因为平面 $CDF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $CDF \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $FM \subset$ 平面 CDF ,
所以 $FM \perp$ 平面 $ABCD$, 2分

因为 $AE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $AE \parallel FM$, 3分

又因为 $FM \subset$ 平面 CDF , $AE \not\subset$ 平面 CDF (未写扣 1 分), 所以 $AE \parallel$ 平面 CDF . 4分

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB \parallel CD$.

又因为 $AB \not\subset$ 平面 CDF , $CD \subset$ 平面 CDF , 所以 $AB \parallel$ 平面 CDF .

又因为 $AB \cap AE = A$, $AB \subset$ 平面 ABE , $AE \subset$ 平面 ABE , 所以平面 $ABE \parallel$ 平面 CDF . 6分

因为 $DF \subset$ 平面 CDF , 所以 $DF \parallel$ 平面 ABE . 7分

(若直接由线线平行到面面平行扣 2 分)

(2) 因为 $AE \parallel FM$ 且 $FM = \sqrt{3} \neq AE$, 所以四边形 $AMFE$ 为梯形, 延长 EF 交 AM 的延长线于 G .
 $AM \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $G \in$ 平面 $ABCD$. 8分

以 A 为原点, AB , AD , AE 所在直线分别为 x , y , z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

$$B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), M(1, 2, 0), E(0, 0, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{DC} = (2, 0, 0), \overrightarrow{ED} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{BE} = (-2, 0, 2\sqrt{3}), \quad \text{9分}$$

设平面 ECD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z_1 = 1, \text{ 可得 } \vec{n}_1 = (0, \sqrt{3}, 1), \quad \text{10分}$$

设 $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AM}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{AM} = (\lambda - 2, 2\lambda, 0)$,

设平面 EBN 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BE} = -2x_2 + 2\sqrt{3}z_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BN} = (\lambda - 2)x_2 + 2\lambda y_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } z_2 = 2\lambda, \text{ 可得 } \vec{n}_2 = (2\sqrt{3}\lambda, 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 2\lambda), \quad \text{12分}$$

$$\text{则 } |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|6 - 3\lambda + 2\lambda|}{2 \cdot \sqrt{12\lambda^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)^2 + 4\lambda^2}} = \frac{|6 - \lambda|}{2 \cdot \sqrt{19\lambda^2 - 12\lambda + 12}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{13分}$$

$$\text{解得 } \lambda = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \text{14分}$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{AN}| = |\sqrt{5}\lambda| = \frac{2\sqrt{15}}{3}. \quad \text{15分}$$

解法 2:

(1) 取 CD 中点 M , 连接 FM . 因为 $\triangle CDF$ 是正三角形, 所以 $FM \perp CD$,
又因为平面 $CDF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $CDF \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $FM \subset$ 平面 CDF ,
所以 $FM \perp$ 平面 $ABCD$, 2分

以 A 为原点, AB , AD , AE 所在直线分别为 x , y , z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

$$D(0, 2, 0), F(1, 2, \sqrt{3}), E(0, 0, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{DF} = (1, 0, \sqrt{3}), \quad \text{3分}$$

取平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (0, 1, 0)$, 4 分

$\overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = 0$, 即 $\overrightarrow{DF} \perp \vec{n}$, 5 分

又 $DF \not\subset$ 平面 ABE (此条件未写扣 2 分) , 故 $DF \parallel$ 平面 ABE 7 分

(2) 同解法 1

解法 3:

(1) 因为 $\triangle CDF$ 是正三角形, 设 M 为 CD 中点, 所以 $FM \perp CD$, $FM = \sqrt{3}$.

又因为平面 $CDF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $CDF \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $FM \subset$ 平面 CDF ,
所以 $FM \perp$ 平面 $ABCD$, 2 分

因为 $AE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $AE \parallel FM$.

设 Q 为 AB 中点, P 为 EB 中点, 所以 $PQ \parallel AE$, $PQ = \sqrt{3}$.

所以 $PQ \parallel FM$, 所以四边形 $PQMF$ 为平行四边形. 4 分

所以 $PF \parallel QM \parallel AD$, 所以四边形 $ADFP$ 为平行四边形.

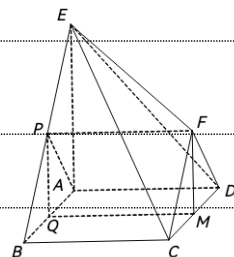
所以 $DF \parallel AP$, 5 分

又因为 $AP \subset$ 平面 ABE , $DF \not\subset$ 平面 ABE (此条件不写扣 1 分) .

所以 $DF \parallel$ 平面 ABE 7 分

(若默认 $BP \parallel CF$ 得到 $DF \parallel AP$ 扣 4 分)

(2) 同解法 1.



18. 解法 1:

(1) 由题 $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 2 分

所以 $a^2 = 3$, $b^2 = 2$,

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 4 分

(2) (i) 设直线 AB 的方程为 $x = my + 3$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 3 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{得 } (2m^2 + 3)y^2 + 12my + 12 = 0 ,$$

$\Delta = (12m)^2 - 48(2m^2 + 3) = 48(m^2 - 3) > 0$, 得 $m^2 > 3$,

$y_1 + y_2 = -\frac{12m}{2m^2 + 3}$, $y_1 y_2 = \frac{12}{2m^2 + 3}$, 6 分

若 $BF \perp x$ 轴, 则 $B\left(1, \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 此时 AB 的斜率 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $m^2 = 3$ (不合题意) ,

所以 AF, BF 的斜率均存在,

$k_{AF} + k_{BF} = \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} = \frac{y_1(x_2 - 1) + y_2(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{2my_1 y_2 + 2y_1 + 2y_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$, 8 分

又 $my_1 y_2 + y_1 + y_2 = \frac{12m}{2m^2 + 3} - \frac{12m}{2m^2 + 3} = 0$, 9 分

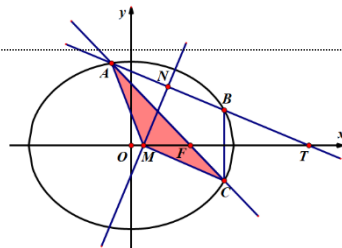
所以 $k_{AF} + k_{BF} = 0$, 即 $k_{CF} + k_{BF} = 0$,

又因为 B, C 均在椭圆上,

如图, 由椭圆对称性可知 $|FB| = |FC|$, 即 $\triangle FBC$ 为等腰三角形. 10 分

(ii) 设 AB 的中点为 $N(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{6m}{2m^2 + 3}$, $x_0 = my_0 + 3 = \frac{9}{2m^2 + 3}$,

所以 $N\left(\frac{9}{2m^2 + 3}, -\frac{6m}{2m^2 + 3}\right)$, 11 分



所以 AB 的垂直平分线为 $y + \frac{6m}{2m^2+3} = -m\left(x - \frac{9}{2m^2+3}\right) \cdots \cdots (1)$

将 $y=0$ 代入方程(1)得 $x = \frac{3}{2m^2+3}$, 所以 $M\left(\frac{3}{2m^2+3}, 0\right)$,12 分

$\triangle AMC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|MF||y_1 + y_2| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{3}{2m^2+3}\right|\left|\frac{12m}{2m^2+3}\right| = \frac{12|m|^3}{(2m^2+3)^2}$,14 分

设 $f(t) = \frac{12t^3}{(2t^2+3)^2}$, $t = |m| > \sqrt{3}$,

$$f'(t) = 12 \times \frac{3t^2(2t^2+3)^2 - 8t(2t^2+3)t^3}{(2t^2+3)^4} = \frac{12t^2(9-2t^2)}{(2t^2+3)^3},$$

当 $\sqrt{3} < t < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $f'(t) > 0$, 当 $t > \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $f'(t) < 0$,

所以 $f(t)$ 在 $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 单调递减,16 分

所以当 $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(t)$ 取得最大值 $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{16}$,

所以 $\triangle AMC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{2}}{16}$17 分

解法 2:

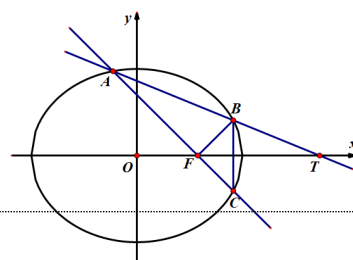
(1) 同解法 1;

(2) (i) 设直线 AB 的方程为 $x = my + 3$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x = my + 3 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 得 $(2m^2+3)y^2 + 12my + 12 = 0$,

$$\Delta = (12m)^2 - 48(2m^2+3) = 48(m^2-3) > 0, \text{ 得 } m^2 > 3,$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{12m}{2m^2+3}, y_1 y_2 = \frac{12}{2m^2+3},$$



设 $B'(x_2, -y_2)$, 则直线 AB' 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \cdots \cdots (1)$ 7 分

将 $y=0$ 代入方程(1)得 $x = x_1 - \frac{(x_1 - x_2)y_1}{y_1 + y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 + y_2} = \frac{2m y_1 y_2}{y_1 + y_2} + 3 = 1$,

所以 A, F, B' 三点共线, 即 B' 与 C 重合,9 分

由椭圆对称性可知 $|FB| = |FC|$, 即 $\triangle FBC$ 为等腰三角形.10 分

(ii) 同解法 1;

解法 3:

(1) 同解法 1;

(2) (i) 设直线 AC 的方程为 $x = ny + 1$, $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $n = \frac{x_1 - 1}{y_1}$,

联立 $\begin{cases} x = ny + 1 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$, 整理得 $(2n^2+3)y^2 + 4ny - 4 = 0$,

$$\Delta > 0, y_1 + y_2 = -\frac{4n}{2n^2+3}, y_1 y_2 = -\frac{4}{2n^2+3},$$
6 分

则 $P(X_3 = 5) = \frac{3 \times (2^4 - 2)}{3^5} = \frac{14}{81}$ 4 分

(另解: 以第二个编号球第一次出现的位置分类, 如若出现在第 2 个位置, 则第 3、4 两个位置不出现最后一个编号球即可, 先确定第一个位置和最后一个位置球的编号, 共有 A_3^2 种, 则此类情

况有 $A_3^2 \cdot 2^2 = 24$ 种, 则 $P(X_3 = 5) = \frac{A_3^2 \times (2^2 + 2^1 + 2^0)}{3^5} = \frac{14}{81}$)

(2) 依题意可得: $X_2 = 2, 3, 4, 5, \dots, m, \dots$,

则 $P(X_2 = k) = \frac{2 \times 1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, $k \geq 2$, 6 分

所以 $E(X_2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{2^{k-1}} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{2^{k-1}} \right)$, 7 分

设 $S_m = \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{2^{k-1}} \right) = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{m}{2^{m-1}}$,

$$\frac{1}{2} S_m = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{m-1}{2^{m-1}} + \frac{m}{2^m} ,$$

作差可得 $\frac{1}{2} S_m = \frac{2}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} - \frac{m}{2^m} = 1 + \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{m-2}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{m}{2^m} = \frac{3}{2} - \frac{m+2}{2^m}$,

所以 $S_m = 3 - \frac{m+2}{2^{m-1}}$, 9 分

所以 $E(X_2) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{2^{k-1}} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{m+2}{2^{m-1}} \right) = 3$ 10 分

(3) 记恰好已经记录得到 $i-1$ ($i \in \mathbb{N}^+$) 个不同的编号后, 开始继续摸球, 直到记录到余下未录得的 $n-(i-1)$ 个球之一的第 i 个新的编号所需要的摸球次数为 ξ_i , 则 $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, 其中 $i=1, 2, \dots, n$, 11 分

$P(\xi_i = k) = \left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{i-1}{n} \right)$, $k=1, 2, 3, \dots, n, \dots$, 12 分

$$E(\xi_i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k \cdot \left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \right) = \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k \cdot \left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-1} \right) ,$$

设 $T_m = \sum_{k=1}^m \left(k \cdot \left(\frac{i-1}{n} \right)^{k-1} \right) = 1 \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^0 + 2 \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^1 + \dots + m \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^{m-1}$,

$$\frac{i-1}{n} T_m = 1 \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^1 + 2 \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 + \dots + (m-1) \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^{m-1} + m \times \left(\frac{i-1}{n} \right)^m ,$$

作差可得:

$$\left(1 - \frac{i-1}{n} \right) T_m = \left(\frac{i-1}{n} \right)^0 + \left(\frac{i-1}{n} \right)^1 + \dots + \left(\frac{i-1}{n} \right)^{m-1} - m \left(\frac{i-1}{n} \right)^m = \frac{1 - \left(\frac{i-1}{n} \right)^m}{1 - \frac{i-1}{n}} - m \left(\frac{i-1}{n} \right)^m , \text{ 13 分}$$

所以 $E(\xi_i) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) T_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{i-1}{n} \right)^m}{1 - \frac{i-1}{n}} - m \left(\frac{i-1}{n} \right)^m \right) = \frac{n}{n-i+1}$,

所以 $E(X_n) = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\xi_i) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1}$,

即 $E(X_n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$,15 分

令 $f(x) = x - \ln(x+1)$, $f'(x) = \frac{x}{x+1}$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f\left(\frac{1}{n}\right) > f(0) = 0$, 即 $\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$,16 分

所以 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1)$,

所以 $E(X_n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) > n \ln(n+1)$17 分

【说明】随着录得的编号的个数 i 从 1 增加到 n , 摸球总次数也在不断增加。将摸球试验按照记录得到的不同编号的个数 i 分成 n 个环节 (小试验), 每一个环节中相应的 ξ_i 即为当且仅当录得一个新的编号时所需摸球次数, 则 $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, 且 ξ_i 均服从几何分布, 即在大试验的第 i 个环节中, 在当已经记录了 $i-1$ 个编号后, 继续开始摸球, 直到出现一个新的编号时, 若摸球次数为 k , 则前 $k-1$ 次均录得旧编号, 且每次摸球成功的概率为 $p_i = \frac{i-1}{n}$, 而第 k 次录得新编号的概率为 $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$. 则

$$P(\xi_i = k) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$